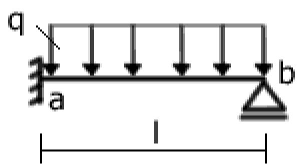
3. Kraftgrößenverfahren

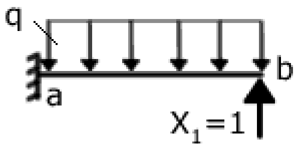
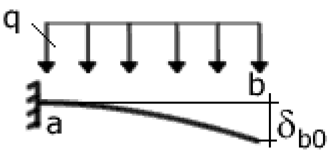
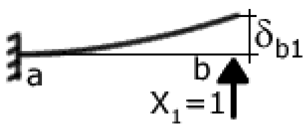
3.1 Prinzip

Das Prinzip des Kraftgrößenverfahrens ist es ein statisch unbestimmtes System durch Einschalten von Gelenken und Zerschneiden von Stäben oder durch Wegnahme von Auflagerkräften, in ein statisch bestimmtes System zu verwandeln. Es werden so viele Fesselungen gelöst und zusätzliche Freiheitsgrade geschaffen, dass gerade noch ein unbewegliches statisch bestimmtes system übrigbleibt. Dieses System heißt **statisch bestimmtes Hauptsystem**. An ihm werden alle Berechnungen vorgenommen. Einmal werden die Schnittgrößen an diesem System durch die äußeren Lasten ermittelt (**Lastspannungszustand**). Anschließend wird für jede entfernte Fesselung deren Gelenk- bzw. Auflagerkräfte oder Momente angetragen und die Schnittgrößen daraus ermittelt (**Eigenspannungszustand**). Nun können die Durchbiegungen oder Verformungen (Delta-Werte) errechnet werden. Mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingung, z.B. dass an einem 'entfesselten' Auflager die Durchbiegung null ist, können nun die Größen der Fesseln bestimmt werden. Durch Superposition der Schnittgrößen von Last- und Eigenspannungszustand erhält man letztendlich die Größen des statisch unbestimmten Systems.
In der Theorie mag sich das alles ganz schön verwirrend anhören, aber in der Praxis ist es dann doch relativ einfach. Das nächste Beispiel eines 1-fach statisch unbestimmten Systems soll das Prinzip des Kraftgrößenverfahrens anschaulich verdeutlichen.

Einseitig eingespannter Träger

Das System		Ein Träger mit der Länge l wird über seine gesamte Länge mit einer Streckenkraft q belastet. Am linken Auflagerrand befindet sich der Punkt a und am rechten der Punkt b. Das System ist 1-fach statisch unbestimmt, deshalb können die vorhandenen Auflagerkräfte nicht durch die 3 Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

Einseitig eingespannter Träger

Statisch bestimmtes Ersatzsystem		Der erste Schritt ist das Herstellen eines statisch bestimmten Ersatzsystems. Dafür müssen wir in diesem Fall eine Auflagerreaktion 'entfesseln'. Hierfür gibt es 4 verschiedene Möglichkeiten. Hier ersetzen wir die Auflagerkraft B_V durch die Kraft X_1. Den Betrag der Kraft setzen wir 1. Somit ist dieses System unbeweglich und statisch bestimmt.
Lastspannungs-zustand		Nun betrachten wir das System wie es sich unter der ursprünglichen Belastung verformt. Der Punkt b wird um den Betrag δ_{b0} (delta $_{b0}$) nach unten verschoben. Der erste Index (b) bezeichnet den Ort und der Zweite (0) die Kraft bzw. die Ursache der Verschiebung. Der Lastspannungszustand erhält immer den Index 0.
	$\delta_{b0} = \dfrac{ql^4}{8EI}$	Die Durchbiegung δ_{b0} entnehmen wir vorerst mal einem Tabellenwerk (z.B. Schneider Bautabellen) später werden wir diese Formel noch selber herleiten.
Eigenspannungs-zustand		Nun betrachten wir wie stark unsere angebrachte Kraft 1 den Träger nach oben biegt. Da diese Kraft Ursprünglich vom System (Auflager) stammt nennt man dies den Eigenspannungszustand. Bei n-fach statisch unbestimmten Systemen gibt es n Zustände. Da dies der erste ist, erhält dieser den Index 1 folglich heißt die Verschiebung des Punktes b hier δ_{b1}.
	$\delta_{b1} = \dfrac{Pl^3}{3EI} = -\dfrac{1l^3}{3EI}$	Wieder entnehmen wir die Formel aus einem Tabellenwerk. ACHTUNG! Negatives Vorzeichen, da der Träger in anderer Richtung wie durch q verschoben wird.
Verträglichkeits-bedingung	$X_1\delta_{b1} + \delta_{b0} = 0$	Da am Punkt b durch das vorhandene Auflager keine Verschiebung statt finden kann muss sich die Verschiebung durch die Belastung q mit der aus X_1 aufheben. Also X_1 mal die Verschiebung aus der Kraft 1 PLUS die Verschiebung von q ist null.

B

Einseitig eingespannter Träger

Lösung	$$-X_1 \frac{1l^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI} = 0$$ $$X_1 = \frac{3}{8} ql$$	Durch Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung erhalten wir dann schließlich den Wert für X_1. Da dies den Wert 1 hatte ist dies zugleich der Wert für B_V. Nun gibt es nur noch 3 unbekannte Auflagerreaktionen, welche, wie schon bekannt, mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden können.

3.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte ist es möglich Verformungen an beliebigen Stellen von beliebig belasteten Systemen zu berechnen. Es ist dem Prinzip der virtuellen Arbeiten untergeordnet. Dabei wird die gespeicherte Energie der äußeren Arbeit gleichgesetzt. Da für das Kraftgrößenverfahren die Anwendung im Vordergrund steht möchte ich auf die Herleitung der jeweiligen Prinzipien verzichten. Für alle die an diesem Thema näher interessiert sind, empfehle ich folgende Bücher:

- **Wagner/Erlhof:** *Praktische Baustatik 3*, 8. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1997; ISBN 3-519-35203-5
- **Hirschfeld:** *Baustatik – Theorie und Beispiele Teil 1 u. 2*, 3. Aufl., Springer Verlag, Heidelberg 1984; ISBN 3-540-04561-9
- **Cziesielski:** *Hütte – Bautechnik IV – Konstruktiver Ingenieurbau 1*, 29. Aufl., Springer Verlag, Heidelberg 1988; ISBN 3-540-18352-3
- **Bochmann:** *Statik im Bauwesen Band 3 – Statisch unbestimmte Systeme*, 12. Aufl., HUSS-Medien GmbH, Berlin 2001; ISBN 3-345-00752-5

Theorie

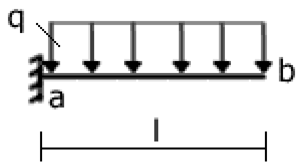
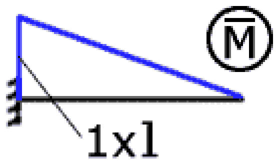
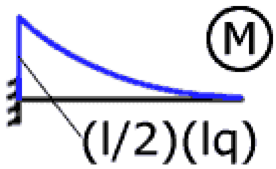
Die Ermittlung der Verformung an einem System erfolgt mit 4 Schritten:

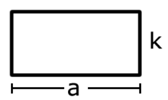
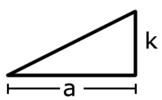
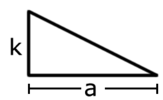
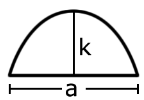
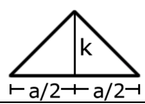
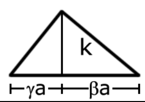
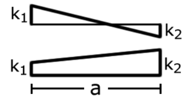
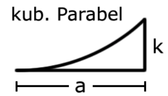
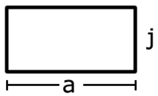
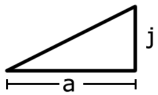
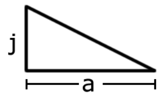
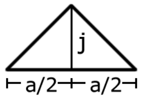
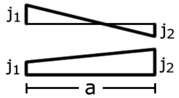
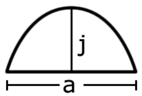
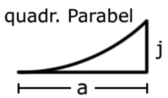
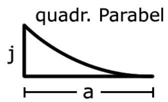
1. Virtuelle Hilfskraft (mit der Größe 1) an der Stelle x anbringen
2. Momentenverlauf daraus bestimmen
3. Tatsächlicher Momentenverlauf
4. Arbeitssatz

$$\overline{1} * w(x) = \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$$

Das ganze erkläre ich am besten mit einem Beispiel. Berechnen wir einfach die vom vorherigen Beispiel aus Tabellenwerken entnommenen Durchbiegunge (δ_{b0}).

B Durchbiegung eines Kragarms

Das System		Ein Träger mit der Länge l wird über seine gesamte Länge mit einer Streckenkraft q belastet. Am linken Auflagerrand befindet sich der Punkt a und am rechten der Punkt b.
virtuelle Hilfskraft		Nun bringen wir eine Hilfskraft mit der Größe 1 an der Stelle an, wo wir die Durchbiegung bestimmen wollen. In unserem Fall im Punkt b.
Momentenverlauf aus der Hilfskraft		Jetzt bestimmen wir den Momentenverlauf. Wir haben einen dreiecksförmigen Verlauf mit dem maximalen Wert von 1×l.
tatsächlicher Momentenverlauf		Der durch die Streckenlast auftretende Momentenverlauf ist eine quadratische Parabel mit dem einem Maximum von (l/2)(lq)=1/2 l^2q.
Arbeitssatz	$\overline{1} * w(x) = \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$	Der Arbeitssatz besagt, dass die Durchbiegung an der Stelle x das Integral der beiden Momentenverläufe durch EI über s bis x ist. Durch schon vorgefertigte Integrationstabellen (siehe nächste Seite) ist die Auflösung dieses Integrals relativ einfach.
Integrations-tabelle	$\frac{1}{4} ajk$	Aus dieser Tabelle entnehmen wir für Dreiecks- und Parabelverlauf (Zelle b7) den Faktor ¼.
Einsetzen	$\overline{1} w = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} l \times \frac{1}{2} l^2 q \times l$ $w = \frac{ql^4}{8EI}$	Nun müssen die entsprechenden Werte nur noch eingesetzt und aufgelöst werden. ACHTUNG: EI nicht vergessen! Dies bleibt durch die Integration konstant und kann deshalb vor das Integral geholt werden. Das Ergebnis können wir nun mit dem beim vorherigen Beispiel dem Tabellenwerk entnommenen vergleichen. Und beide Formeln stimmen über ein.

		a	b	c	d	e	f	g	h
	$\int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$								
1		ajk	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{2}{3}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}aj(k_1+k_2)$	$\frac{1}{4}ajk$
2		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{6}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{6}ajk(1+\gamma)$	$\frac{1}{6}aj(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{5}ajk$
3		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{6}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{6}ajk(1+\delta)$	$\frac{1}{6}aj(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{20}ajk$
4		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{5}{12}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{12}ajk\frac{3-4\gamma^2}{\delta}$ $für \gamma \leq \delta$	$\frac{1}{4}aj(k_1+k_2)$	$\frac{3}{32}ajk$
5		$\frac{1}{2}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{6}a(j_1+2j_2)k$	$\frac{1}{6}a(2j_1+j_2)k$	$\frac{1}{3}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{4}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{6}a[j_1(1+\delta)$ $+j_2(1+\gamma)]k$	$\frac{1}{6}a[j_1(2k_1+k_2)$ $+j_2(k_1+2k_2)]$	$\frac{1}{20}ak(j_1+4j_2)$
6		$\frac{2}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{8}{15}ajk$	$\frac{5}{12}ajk$	$\frac{1}{3}ajk(1+\gamma\delta)$	$\frac{1}{3}aj(k_1+k_2)$	$\frac{2}{15}ajk$
7		$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$	$\frac{1}{5}ajk$	$\frac{7}{48}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$ $(1+\gamma+\gamma^2)$	$\frac{1}{12}aj(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{60}ajk$
8		$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{5}ajk$	$\frac{7}{48}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$ $(1+\delta+\delta^2)$	$\frac{1}{12}aj(3k_1+k_2)$	

3.3 Algorithmus des Kraftgrößenverfahrens

Das Kraftgrößenverfahren folgt immer einem gleichen Ablauf. Dieser Algorithmus wurde am Anfang des Kapitels schon einmal erläutert und besteht aus 5 verschiedenen Hauptpunkten:

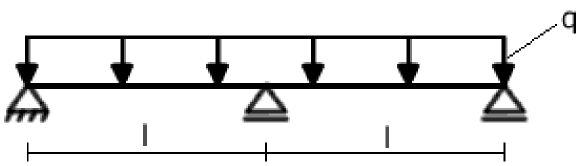
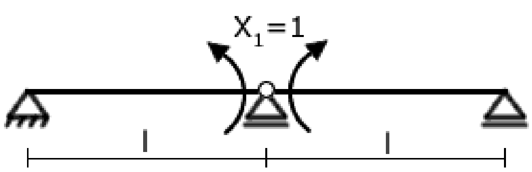
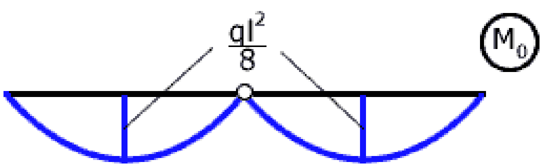
1. **Statisch bestimmtes System** herstellen
2. Antragen der Schnittgrößen am statisch bestimmten Ersatzsystem (**Lastspannungszustand**)
3. Bestimmung der Schnittgrößen aus den Ersatzkräften bzw. Momenten (**Eigenspannungszustand**)
4. **Berechnen der δ-Werte** (Delta)
5. Aufstellen und -lösen der **Verträglichkeitsbedingungen**

Bei Berechnungen an komplizierten mehrfach statisch unbestimmten Systemen hilft es, Punkt für Punkt vor zu gehen.

3.4 Beispiele

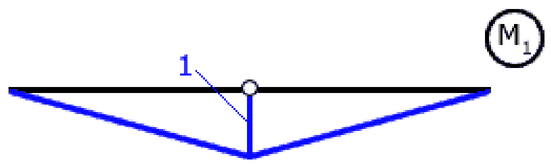
B

Der 2-Feld Träger

Das System	
	Ein zweifeldträger (1-fach statisch unbestimmt) wird über seine gesamte Länge (2l) mit einer Linienlast q belastet.
1. statisch bestimmtes Ersatzsystem	
	Wie schon im Kapitel 3.1 beschrieben gibt es mehrer Möglichkeiten ein statisch bestimmtes Ersatzsystem herzustellen. Hier setzen wir nun Gelenk über dem mittleren Auflager ein und tragen ein Moment mit der Größe 1 an.
2. Lastspannungszustand	
	Der Lastspannungszustand Beschreibt die Schnittgrößen am Ersatzsystem unter der von außen wirkenden Last. Der Momentenverlauf ist parabolisch mit dem maximal Wert ql²/8.

Der 2-Feld Träger

3. Eigenspannungszustand



Der Eigenspannungszustand beschreibt die Schnittgrößen durch das Ersatzmoment. Der Verlauf ist an der Stelle wo das Moment angebracht wurde 1 und nimmt zu den Auflagern linear ab.

4. Berechnen der δ- Werte

$$EI\delta_{10} = \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{8} 1 + \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{8} 1 = \frac{1}{12} ql^3$$

Laut der Integrationstabelle (Zeile 2 und 3 und Spalte d) ist der Faktor jeweils immer 1/3.
Der hier ermittelte Wert stellt nun die Verdrehung des Trägers am Gelenk durch die Streckenlast dar.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} l \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} l \times 1 \times 1 = \frac{2}{3} l$$

Bei der Überlagerung des Eigenspannungszustandes ist der Faktor jeweils 1/3 (siehe Integrationstabelle Zeile 2-3 und Spalte b-c).
Dieser Wert hier beschreibt die Verdrehung durch das Moment 1.

5. Verträglichkeitsbedingung

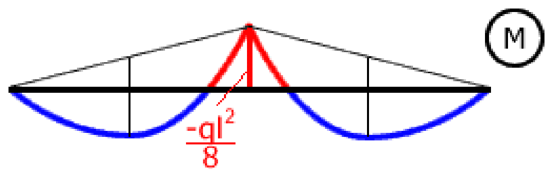
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{2}{3} l \times X_1 + \frac{1}{12} ql^3 = 0$$

$$X_1 = -\frac{ql^2}{8}$$

Da der Träger am mittleren Auflager keine Verdrehung aufweist, gilt wieder die Verträglichkeitsbedingung.

Lösung



Der tatsächliche Momentenverlauf wird nun durch die Überlagerung der beiden Zustände erreicht, wobei der Eigenspannungszustand mit X_1 multipliziert wird.